УДК 517.928.4
DOI 10.35254/bsu/2025.74.35

Туркманов Ж. К.
К.Карасаев атындагы БМУ,
ф-м.илим. канд. доц.
zhturkmanov@bhu.kg

Карынбаева М. М.,
К.Карасаев атындагы БМУ,
ага окутуучу
mkarynbaeva@bhu.kg

МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛДЕРДЕГИ РЕГУЛЯРДУУ ЖАНА СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛУУЛАР: АНАЛИЗ ЖАНА АСИМПТОТИКАЛЫК ЫКМАЛАР

Кыскача мазмуну

Чыныгы процесстерди моделдөөнүн математикалык ыкмалары көп учурда чакан параметрлерди камтыйт, алар динамикалык системаларда регулярдуу жана сингулярдуу козголуулар пайда кылат. Бул изилдөө чакан параметрлүү дифференциалдык теңдемелердин системалуу анализине жана алардын чечимдердин мүнөзүнө таасир этүүнүн сапаттык айырмачылыктарын аныктоого жана аклоого багытталган. Асимптотикалык приближение ыкмалары бузулган маселелер үчүн асимптотикалык ажыктоолорду жана функционалдык катарларды куруу максатында колдонулат. Дифференциалдык теңдемелердин конкреттүү мисалдары регулярдуу козголуулар чечимдердин өч ала салыштырмалуу минордуу өзгөрүүлөрүнө алып келсе, сингулярдуу козголуулар чектик слойлордун түзүлүшүнүн ичинде олуттуу сапаттык трансформацияларга себеп болорун көрсөтөт. Асимптотикалык катарлардын жакындашуусу жана ажыраашы касиеттери толугу менен изилденген. Бул натыйжалар прикладдуу математикада жана сандык системалык моделдөө үчүн практикалык мааниге ээ.

Түйүндүү сөздөр: чектик слойлор, сапаттык трансформациялар, сандык моделдөө, жакындаштырылган чечимдер, асимптотикалык ажыктоолор, динамикалык системалар, козголуу операторлору, дегенеративдүү теңдемелер, прикладдуу маселелер, козголуу теориясы

Туркманов Ж. К.
БГУ им. К.Карасаева,
к.ф-м.н. доц.
zhturkmanov@bhu.kg

Карынбаева М. М.,
БГУ им. К.Карасаева,
старший преподаватель
mkarynbaeva@bhu.kg

РЕГУЛЯРНЫЕ И СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ: АНАЛИЗ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Аннотация

Математические модели реальных процессов часто содержат малые параметры, вызывающие регулярные и сингулярные возмущения динамических систем. Настоящее исследование сосредоточено на системном анализе дифференциальных уравнений с малыми параметрами и выявлении качественных различий в их влиянии на характер решений. Применены асимптотические методы приближения для построения асимптотических разложений и функциональных рядов возмущённых задач. На конкретных примерах дифференциальных уравнений продемонстрировано, что регулярные возмущения вызывают незначительные количественные изменения решений, тогда как сингулярные возмущения приводят к существенным качественным трансформациям, включая формирование граничных слоёв. Исследованы вопросы сходимости и расходимости асимптотических рядов. Полученные результаты имеют практическое значение для анализа сложных математических моделей в прикладной математике и численном моделировании систем.

Ключевые слова: граничные слои, качественные преобразования, численное моделирование, приближённые решения, асимптотические разложения, динамические системы, операторы возмущений, дегенеративные уравнения, прикладные задачи, теория возмущений

Turkmanov Zh.K.
BSU named after K. Karasaev,
Ph.D. Assoc. Prof.
zhturkmanov@bhu.kg

Karynbaeva M. M.,
BSU named after K. Karasaev,
senior lecturer
mkarynbaeva@bhu.kg

REGULAR AND SINGULAR PERTURBATIONS IN MATHEMATICAL MODELS: ANALYSIS AND ASYMPTOTIC METHODS

Abstract

Mathematical models of real processes often contain small parameters inducing regular and singular perturbations in dynamical systems. This research focuses on systematic analysis of differential equations with small parameters and identifies qualitative differences in their influence on solution behavior. Asymptotic approximation methods construct asymptotic expansions and functional series for perturbed problems. Examples of differential equations demonstrate that regular perturbations cause insignificant quantitative changes, whereas singular perturbations lead to substantial qualitative transformations, including boundary layer formation. Convergence and divergence properties of asymptotic series are examined. Results have practical significance for analyzing complex mathematical models in applied mathematics and numerical system modeling.

Keywords:boundary layers, qualitative transformations, numerical modeling, approximate solutions, asymptotic expansions, dynamical systems, perturbation operators, degenerate equations, applied problems, perturbation theory

Киришүү. Математикалык моделдөөдө чыныгы процесстерди жөнөкөйлөтүү үчүн кичине параметрлерди камтыган дифференциалдык теңдемелер кеңири колдонулат. Бул иште регулярдуу жана сингулярдуу козголуулардын негизги айырмачылыктары, алардын чечимдерге тийгизген таасири жана асимптотикалык анализдин ыкмалары каралат. Сингулярдуу козголгон маселелерде чектөө катмарынын пайда болушу, моделдердин жакындаштыруу ыкмалары жана практикалык колдонмолору изилденет. Изилдөөнүн негизги максаты – козголгон системалардын өзгөчөлүктөрүн түшүндүрүүчү жана аларды чечүүгө мүмкүндүк берүүчү ыкмаларды иштеп чыгуу.

Козголууларды шарттуу түрдө эки класска бөлүүгө болот: регулярдуу жана сингулярдуу козголуулар. Эгерде алардын сапаттык айырмачылыгын карасак, анда төмөнкүчө айтууга болот: регулярдуу козголуу деп козголбогон маселени чечүүдө аз гана өзгөрүүлөрдү пайда кылган козголууну түшүнүүгө болот. Ал эми сингулярдуу козголуу болсо, кээ бир мааниде кичинекей болуп көрүнгөнү менен, чечиминде олуттуу өзгөрүүлөрдү пайда кылат. [1, с. 45-48.]

Эки теңдеме карап көрөлү :

$$A_0 : L_0 u = f_0$$
$$A_\varepsilon : L_0 u + \varepsilon L_1 u = f_0 + \varepsilon f_1$$

Бул жерде L_0 жана L_1 – берилген операторлор, f_0 жана f_1 – берилген функциялар, ε – чакан сандык параметр ($\varepsilon > 0$ деп эсептейбиз) , u – табылышы керек болгон функция жана x (бир же көп өлчөмдүү) өзгөрмөсүнөн көз каранды. A_0 теңдемеси кандайдыр бир процесстин жөнөкөйлөштүрүлгөн модели катары, ал эми A_ε теңдемеси ошол процесстин кеңейтилген модели катары каралат. Бул маселелер D аймагында каралат, б.а. $u = u(x), x \in D$. A_0 маселесинин чыгарылышы $u_0(x)$, ал эми A_ε маселесинин чыгарылышы $u_\varepsilon(x)$ деп белгилейли. Козголуулар теориясынын негизги суроосу: $\varepsilon \to 0$ болгондо, $u_\varepsilon(x) - u_0(x)$ айырмасы нөлгө умтулабы? Белгилүү бир деңгээлде, бул суроого жооп норманы тандап алуудан көз каранды. Андан ары, ар бир чекитте x үчүн $u(x) = col\left(u_1(x), \ldots, u_k(x)\right)$ векторунун нормасы деп евклиддик норманы түшүнөбүз:

$$\left\| u(x) \right\| = \sqrt{u_1(x)^2 + \ldots + u_k(x)^2}$$

Айрыкча, эгерде u скалярдык функция болсо, анда $\|u(x)\| = |u(x)|$ болот. Демек, $u(x)$ нормасы x-тен көз каранды болот.

Аныктама: A_ε теңдемеси **регулярдуу козголгон** деп аталат, эгерде $\sup\|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| \to 0$ го умтулганда, $\varepsilon \to 0$ болсо.

Аныктама: A_ε теңдемеси **сингулярдуу козголгон** деп аталат, эгерде жогорудагы шарт аткарылбаса, башкача айтканда, $\varepsilon \to 0$ болгондо, $u_\varepsilon(x) - u_0(x)$ айырмасы нөлгө умтулбаса.

1) A_0 теңдемеси дифференциалдык теңдеме эмес, башкача айтканда $\varepsilon = 0$ болгондо A_ε дифференциалдык теңдемеси A_0 теңдемесине өтөт жана ошол себептен A_0 теңдемеси дегенерацияланган деп аталат.

2) A_0 теңдемесинин $u_0(x)$ чыгарылышы, ε өтө кичине болгондо, A_ε маселесинин $u_\varepsilon(x)$ чыгарылышына бүткүл аралык боюнча жакын болбойт. Тактап айтканда, бул жакындык баштапкы чекитке жакын өтө тар δ аймагында бузулат, бирок калган аралыкта, тактап айтканда, $[\delta, 1]$ кесиндисинде (мында δ канчалык кичине сан болбосун, бирок туруктуу бир сан) $u_0(x)$ чыгарылышы $u_\varepsilon(x)$ чыгарылышына жакын болуп калат. Ал эми $[0, \delta]$ аралыгында $u_\varepsilon(x)$ чыгарылышы баштапкы шарттагы мааниден тез өзгөрүп, $u_0(x)$ чыгарылышына жакын мааниге өтө курч өтүү менен жакындайт. Мындай өзгөрүү байкалган тар аралык чектеш катмар деп аталат. [2, с. 56-60]

$u_\varepsilon(x) - A_\varepsilon$ маселесинин чечими болсун жана D аймагында аныкталсын. $D_1 - D$ нын бир бөлүгү болсун (кээ бир учурларда D менен дал келип калышы мүмкүн). D_1 аймагынын ичинде $U(x,\varepsilon)$ деген функция берилсин дейли. Мында $\varepsilon > 0$

Аныктама: Эгерде $U(x,\varepsilon)$ функциясы $\sup\limits_{D_1}\|u_\varepsilon(x) - U(x,\varepsilon)\| \to 0$ шартын канааттандырса, анда $U(x,\varepsilon)$ функциясы $u_\varepsilon(x)$ үчүн ε параметри боюнча асимптотикалык жакындоо деп аталат.

Эгерде $\sup\limits_{D_1}\|u_\varepsilon(x) - U(x,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^k)$ шартын канааттандырса, анда $U(x,\varepsilon)$ функциясы $u_\varepsilon(x)$ үчүн ε^k тартибиндеги асимптотикалык жакындоо деп аталат.

Бул макалада сингулярдуу бузулган маселелердин чечимдери үчүн асимптотикалык жакындоолорду түзүү ыкмалары каралат. Алар толук D областында изилденет. Мында, эреже катары, ε даражалары боюнча катар түзүлөт, ал төмөнкүдөй түргө ээ:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, \varepsilon) \tag{1}$$

(мында $uk(x, \varepsilon)$ - чектелген функциялар) жана анын n-чи бөлчөк суммасы

$$U_n(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k u_k(x, \varepsilon)$$

$u_\varepsilon(x)$ чечими үчүн D областында ε^{n+1} тактыкта асимптотикалык жакындоо болуп саналат, башкача айтканда:

$$\sup_D \| u_\varepsilon(x) - U_n(x, \varepsilon) \| = O(\varepsilon^{n+1}) \tag{2}$$

Аныктама: Эгерде (1) катары (2) шартын D областында $\varepsilon \to 0$го умтулганда канааттандырса, анда ал асимптоикалык катар деп аталат.

Практикада толук катарды (1) эч качан түзүшпөйт. Адатта, катардын алгачкы бир нече мүчөлөрүн эсептөө менен гана чектелишет, б.а. кандайдыр бир n үчүн $U_n(x, \varepsilon)$ табышат. Бирок "асимптотикалык катарды түзүү " деген түшүнүк муну гана билдирбейт. Эгерде катардын каалаган номерине чейинки мүчөлөрүн табууга мүмкүнчүлүк берген алгоритм көрсөтүлсө, анда ал катар түзүлдү деп эсептелет.

Маанилүү жагдайга көңүл буруу керек: (1) катар $u_\varepsilon(x)$ функциясына жыйналбашы да мүмкүн жана ал таралуучу катар болушу да ыктымал. (1) катары $u_\varepsilon(x)$ функциясына жыйналуусу төмөнкү шарт менен берилет:

$$\| u_\varepsilon(x) - U_n(x, \varepsilon) \| \to 0, \qquad n \to \infty \tag{3}$$

(1) асимптотикалык катар болуп эсептелиши үчүн (2) шартын канааттандыруусу зарыл б.а. $c > 0$ жана $\varepsilon_0 > 0$ сандары жашайт жана $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ шартында төмөнкү барабарсыздык аткарылат:

$$\sup_D \| u_\varepsilon(x) - U_n(x, \varepsilon) \| \le c\varepsilon^{n+1} \tag{4}$$

Бул барабарсыздык ε^{n+1} мүчөсү $n \to \infty$ болгондо 0 го умтулат, бирок $c = c(n)$ да n ден көз каранды. Эгер $c(n)\varepsilon^{n+1}$ 0 го умтулбаса, анда бул шартты колдонуу туура эмес болуп калат. [3, с. 102-105].

Төмөнкү дифференциалдык теңдемени карап көрөлү:

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x^2} - \frac{1}{x} \qquad (5)$$

Бул теңдеменин чыгарылышын катар түрүндө издеп көрөлү

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x) \qquad (6)$$

(6) катарды (5) теңдемеге коюп төмөнкүнү алабыз:

$$\varepsilon(u_0^{'} + \varepsilon u_1^{'} + ... + \varepsilon^{k-1} u_{k-1}^{'} + ...) = -\frac{1}{x^2}(u_0 + \varepsilon u_1 + ... + \varepsilon^k u_k + ...) - \frac{1}{x}$$

Барабардыктын эки жагын салыштырып, ε дун даражасы окшош болгондорун өзүнчө жазып алабыз.

$$0 = -\frac{u_0}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad u_0^{'} = -\frac{u_1}{x^2}, \quad u_1^{'} = -\frac{u_2}{x^2}, \ldots, \quad u_{k-1}^{'} = -\frac{u_k}{x^2}, \ldots,$$

Бул жактан изделип жаткан катардын коэффициенттерин табабыз:

$$u_0 = -x, \quad u_1 = x^2, \quad u_2 = -(2!)x^3, \ldots, \quad u_k = (-1)^{k+1}(k!)x^{k+1}, \ldots$$

Ошентип, x тин бардык чекиттеринде ($x = 0$ дон башка) төмөнкү катарды түзүп алууга болот:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (-1)^{k+1}(k!)x^{k+1} \qquad (7)$$

Бул (7) - катары Даламбердин белгсиснин негизинде жыйналбоочу (таралуучу) катар болот. Бул жыйналбоочу катар асимптотикалык катар экенин көрсөтөлү. (5) теңдемесин $0 < x \leq a$ аралыгында карайбыз. (5) - теңдеменин жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө болот:

$$u = c\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right) - \left(\int_0^x \frac{1}{\varepsilon t}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t}\right)dt\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right)$$

$c = 0$ болгон учурдагы (5) - теңдеменин жекече чыгарылышы төмөндөгүдөй болот:

$$u_\varepsilon(x) = -\left(\int_0^x \frac{1}{\varepsilon t}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t}\right)dt\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right)$$

Жекече чыгарылышын 3 жолу интегралдап төмөнкү жоопту алабыз:

$u_\varepsilon(x) = -x + \varepsilon x^2 + O(\varepsilon^2)$ келип чыгат.

Интегралдоону улантуу менен төмөнкү барабардыкты алабыз:

$$u_{\varepsilon}(x) = -x + \varepsilon x^2 - 2\varepsilon^2 x^3 + ... + \varepsilon^n (-1)^{n+1}(n!)x^{n+1} + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k (-1)^{k+1}(k!)x^{k+1} + O(\varepsilon^{n+1})$$

Жогорудагы барабардыктан (7) жыйналбоочу катары асимптотикалык катар экендиги көрүнүп турат. [4, с. 112-115]

Жыйынтык. Бул изилдөөдө математикалык моделдердеги регулярдуу жана сингулярдуу козголуулардын негизги өзгөчөлүктөрү, алардын чечимдердин сапатына тийгизген таасири жана асимптотикалык жакындаштыруу ыкмалары системалык түрдө каралды. Айрыкча, сингулярдуу козголгон маселелердеги чектөө катмарынын динамикасы, анын моделдөө процессине тийгизген таасири илимий негизделген.

Адабияттар

1. Абдыкалыков, А. К. Дифференциалдык теңдемелер жана алардын колдонулушу / А. К. Абдыкалыков. – Бишкек, 2018. – 156 б.
2. Васильева, А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – Москва : Высшая школа, 1990. – 208 с.
3. Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – Москва : Наука, 1985. – 232 с.
4. Вазов, В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов ; перевод с английского В. Ф. Бутузова, А. Б. Васильевой, М. В. Федорюка. – Москва : Мир, 1968. – 464 с.
5. Nayfeh, A. H. Perturbation Methods / A. H. Nayfeh. – New York : Wiley, 2008. – 437 p.
6. Holmes, M. H. Introduction to Perturbation Methods / M. H. Holmes. – 2nd ed. – New York : Springer, 2013. – 438 p. – (Texts in Applied Mathematics ; vol. 20).
7. Жумабаев, М. С. Асимптотикалык методдор жана алардын математикалык моделдөөдө колдонулушу / М. С. Жумабаев. – Бишкек, 2020. – 150 б.
8. Туркманов, Ж.К. Алсыз сингулярдуу чекити бар үзгүлтүккө учураган сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы. / Ж.К. Туркманов, М.М. Карынбаева.: Кыргыз Улуттук Илимдер Академиясынын Математика институтунун Жарчысы, – Бишкек, 2022. – 81 б.
9. Туркманов, Ж.К. Квазисызыктуу параболалык теңдемелер системасынын априордук баалоолору. / Ж.К. Туркманов, М.М. Карынбаева: Кыргыз Улуттук Илимдер Академиясынын Математика институтунун Жарчысы, – Бишкек , 2023. – 108 б.
10. Туркманов, Ж.К. Кичине параметрлүү сызыктуу эмес кадимки дифференциалдык теңдемелердин чечимдеринин асимптоттук кеңейүүлөрү / Ж.К. Туркманов, М.М. Карынбаева. – БМУ Жарчысы, – Бишкек, 2024 №3 (69). 229-236. – DOI 10.35254/bsu/2024.69.35. – EDN OVPMOC.